ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 19 AVRIL 1915.

PRÉSIDENCE DE M. Ed. PERRIER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Secrétaire perpétuel** présente à l'Académie le Tome XXXV (deuxième série) des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences et publiés par son ordre*.

AGRONOMIE. — *Études sur la valeur agricole des limons charriés par les cours d'eau des Alpes et des Pyrénées.* Note de MM. **A. Müntz** et **E. Lainé**.

Nous avons montré, dans une Note récente ([1]), que les rivières arrachent aux montagnes d'énormes quantités de matériaux, mais qu'agents de sédimentation en même temps que de transport, ils forment tout le long de leur vallée des terrains à texture de plus en plus fine, à mesure que leur pente diminue. Si des canaux d'irrigation s'y alimentent, c'est en général dans la région des plaines, où les éléments les plus fins des matériaux en suspension se sont sélectionnés. Cette sédimentation méthodique se continue d'ailleurs dans la tête-morte du canal et ce sont uniquement les limons les plus ténus que les eaux d'arrosage déposent sur les terres cultivées.

Nous nous proposons d'étudier, dans la présente Note, la valeur agricole de ces différents dépôts. Nos recherches ont porté sur les matériaux charriés par les rivières des Alpes et des Pyrénées.

([1]) *Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 462.

Au point de vue chimique, les limons ont à peu près la même teneur en matières fertilisantes que les bonnes terres arables moyennes. Ils contiennent en effet :

	Pour 1000.
Azote	0,7 à 1,2
Acide phosphorique	0,8 à 1,5
Potasse	1,5 à 2,0

Ceux qui sont particulièrement ténus et argileux, tels que ceux de la Garonne à Toulouse, et ceux qui restent en suspension dans les eaux d'arrosage du canal de Carpentras, contiennent jusqu'à 3 à 4 pour 1000 de ce dernier élément. Ils sont en outre toujours riches en carbonate de chaux. Les limons peuvent donc former par leur dépôt des terres fertiles. Ils sont également susceptibles d'améliorer des terres peu fertiles, auxquelles le colmatage apporte, non seulement les éléments chimiques de la fertilité, mais aussi du corps et de la profondeur. Mais il ne semble pas, par contre, que le limonage puisse augmenter les réserves de matières fertilisantes des sols soumis au régime de l'irrigation, qui sont généralement riches et fortement fumés.

Ce n'est donc pas tant par leur constitution chimique que les limons influent sur les terres arables. Ils jouent, au contraire, un grand rôle en modifiant leurs propriétés physiques, dont l'importance est si grande au point de vue de la fertilité, surtout quand il s'agit de terres à l'arrosage (1).

Nous avons déterminé les propriétés physiques des limons au moyen d'un appareil de laboratoire construit en vue de nos recherches antérieures sur l'irrigation. La méthode consiste en principe à placer la terre à étudier dans un tube de laiton, fermé à la partie inférieure par une toile métallique fine, à l'humecter, puis à la ressuyer sur la même terre séchée à l'air. Pendant ces opérations, qui sont effectuées pendant des temps toujours les mêmes, la terre est soumise à une pression constante. De simples pesées permettent de déterminer :

La *densité apparente;*

La *porosité*, ou volume des espaces vides;

La *capacité pour l'eau*, c'est-à-dire l'eau d'imbibition qui demeure dans la terre ressuyée; on l'exprime *en volumes* ou *en poids;* elle mesure la réserve d'eau que la terre est capable d'emmagasiner pour la mettre à la disposition des plantes;

---

(1) *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 329; t. 148, 1909, p. 1435, et t. 154, 1912, p. 481.

La *capacité pour l'air*, ou volume des espaces vides non occupés par l'eau dans la terre ressuyée; elle mesure le degré d'aération du sol, et les terres deviennent asphyxiantes lorsqu'elle est trop réduite.

On détermine enfin, sur la même masse de terre, la *perméabilité*, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle l'eau s'y infiltre et la traverse.

Ces propriétés physiques sont très importantes à considérer pour les terres soumises à l'arrosage, dont elles règlent la fertilité plus que la composition chimique. L'irrigation ne donne satisfaction que dans les terres à capacités pour l'eau et pour l'air suffisantes et à perméabilité moyenne. Ces propriétés sont d'ailleurs déterminées par la constitution physique des sols.

A titre d'exemple, nous avions obtenu, pour certains de ces limons, la composition physique suivante :

		Sable			Limon			
	Gravier.	grossier.	moyen.	fin.	sableux.	fin.	très fin.	Argile.
Isère à Montmélian.	0	0,8	23,2	23,0	31,4	17,1	2,1	2,4
Isère à Grenoble...	0	0,3	4,2	3,9	16,7	40,6	30,3	4,0
Durance à Sisteron.	0	0	0,1	0	0,7	13,6	64,8	20,8
» à Mirabeau :								
Crue 2 juin 1912.	0	0	3,5	7,0	40,5	30,5	14,0	4,5
Crue 22 oct. 1912.	0	0,1	0,2	0,1	0,8	0,7	76,9	21,2

La détermination des propriétés physiques de ces limons nous a donné :

		Capacité			
	Porosité.	pour l'eau en volumes.	pour l'eau en poids.	pour l'air.	Perméabilité ([1]).
Isère à Montmélian...............	50,4	25,0	18,4	25,4	3,3
Isère à Grenoble.................	55,7	41,8	27,8	13,9	0,3
Durance à Sisteron...............	47,3	35,2	24,4	12,1	0,0004
Durance à Mirabeau :					
Crue du 2 juin 1912............	46,6	29,6	21,1	17,0	0,5
Crue du 22 octobre 1912........	50,6	45,7	35,2	4,9	0

C'est la perméabilité qui subit les plus grandes variations : notable pour les limons grossiers de l'Isère à Montmélian, elle devient faible pour les parties plus ténues qui restent encore en suspension à Grenoble. Ceux de la Durance sont le plus souvent presque tout à fait imperméables et les limons

([1]) On exprime la perméabilité par la hauteur de la couche d'eau qui s'infiltre en un temps déterminé (centimètres par heure).

que charrient les canaux d'irrigation possèdent une imperméabilité absolue. En même temps, la capacité pour l'air diminue, quand les limons deviennent très ténus, et les plus fins formeraient des terres asphyxiantes. La capacité pour l'eau augmente avec la ténuité des éléments, mais ne devient jamais très élevée. Cette dernière propriété est surtout influencée par l'abondance de l'argile colloïdale, et, contrairement à l'opinion généralement admise, les limons sont généralement peu argileux.

En résumé, les limons fins transportés par les canaux d'irrigation constituent des sols de capacité pour l'eau moyenne, mais compacts, asphyxiants et imperméables. Ils tendent donc à communiquer ces derniers défauts aux terres irriguées.

Les matériaux transportés par les canaux peuvent former des masses considérables si la rivière à laquelle ils s'alimentent est très limoneuse. C'est le cas des canaux dérivés de la Durance. Pour le canal de Carpentras, par exemple, nous avons déterminé, d'après des échantillons prélevés par M. Prost, que l'eau d'irrigation apportait aux terres $0^{kg},967$ de limon par mètre cube, moyenne obtenue sur des prises d'échantillons effectuées tous les jours pendant 4 années consécutives, de 1903 à 1906. Si l'on admet que les terres reçoivent par an 31 arrosages de 800^{m^3}, l'eau d'arrosage dépose près de 24 tonnes de limon par an et par hectare, ce qui équivaut à une épaisseur de $1^{mm},7$, si l'on admet que la densité apparente du dépôt est de 1,4. On est donc amené à conclure que le niveau moyen du périmètre arrosé du canal de Carpentras serait surélevé de 17^{cm} par siècle [1].

Les apports de limons par certains canaux sont donc considérables et de nature à altérer fortement les propriétés physiques des terres irriguées. Cette action devient manifeste sur les canaux très anciens. Pour nous permettre de la mettre en lumière, M. Prost a prélevé des échantillons de terre sur le périmètre de quelques canaux de la région méditerranéenne de l'Espagne, dont la création remonte à l'époque de la domination des Maures. Il a prélevé en même temps des échantillons en des points voisins dont la terre était primitivement de même nature, mais n'a jamais été soumise à l'arrosage. Nous avons nous-mêmes prélevé des échantillons analogues sur le périmètre du canal de Saint-Julien, qui a sa prise dans la Durance et qui arrose les environs de Cavaillon depuis le XVe siècle. Ils nous ont donné :

---

[1] M. Barois a calculé que les inondations périodiques du Nil déposaient chaque année une couche de limon atteignant 1^{mm} d'épaisseur (J. Barois, *L'irrigation en Égypte*).

Localités.	Indications relatives à l'arrosage.	Analyse physique. Limon sableux.	fin.	très fin.	Argile.	Propriétés physiques. Capacité pour l'eau en volumes.	en poids.	Capacité pour l'air.	Perméabilité.
Benimamet	Arrosé par l'Acequia Real de Moncada.	14,4	17,8	32,4	15,0	35,1	24,4	9,5	0,06
Id.	Non arrosé	30,9	16,8	16,0	7,5	24,2	15,6	17,3	0,46
Benifayo	Arrosé par l'Acequia Real del Jucar.	15,3	16,2	23,6	19,7	34,5	24,3	11,5	0,10
Id.	Non arrosé	20,3	17,1	13,7	10,3	27,5	19,0	16,7	0,42
Cavaillon	Arrosé par le canal de Saint-Julien..	6,3	10,6	41,2	12,3	»	»	»	0,3 (¹)
Id.	Non arrosé	11,6	10,5	23,7	13,8	»	»	»	20,4 (¹)

On voit que l'application prolongée d'arrosages par les eaux limoneuses accroît considérablement la proportion des éléments fins. Il en résulte que les terres deviennent plus compactes, moins aérées et surtout moins perméables. Nous avons montré antérieurement (²) qu'il fallait des quantités d'eau moins grandes pour effectuer l'arrosage des terres peu perméables. On peut donc faire des économies d'eau dans les terrains soumis depuis longtemps à l'arrosage par des eaux troubles. C'est d'ailleurs ce que l'expérience confirme.

Cette modification dans la constitution des terres n'est pas suivie d'un accroissement de leur fertilité : le limonage a plutôt, pour les bonnes terres, une influence défavorable; mais, comme il ne se produit qu'à la longue, et qu'en même temps, sur les vieux canaux, les cultivateurs ont acquis une expérience très approfondie de l'emploi de l'eau et de la pratique des cultures riches, cette influence n'est pas sensible.

Le limonage peut, au contraire, transformer des terres stériles en terres très productives, comme on le voit par l'exemple de la plaine de la Crau, où le colmatage a pour ainsi dire créé de toutes pièces des sols dont la fécondité tranche sur le reste de ce pays déshérité.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur une série de surfaces et sur les équations de Laplace qui se reproduisent par une transformation (m, n) de M. Darboux.* Note (³) de M. C. **Guichard**.

Dans ma Note du 15 février (⁴) j'ai considéré deux séries de surfaces

$$(M),\ (M'),\ (M''),\ \ldots \quad \text{et} \quad (C_1),\ (C'_1),\ (C''_1),\ \ldots;$$

(¹) La perméabilité a été déterminée par la mesure directe sur le terrain.

(²) *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 481.

(³) Séance du 29 mars 1915.

(⁴) *Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 222.

ces surfaces sont rapportées à leurs lignes de courbure, les surfaces d'une série ont la même représentation sphérique; $(C_1^{(n)})$ est le lieu des centres des sphères osculatrices à la première série de lignes de courbure de $(M^{(n)})$; $(M^{(n+1)})$ possède la même propriété à l'égard de $(C^{(n)})$. Je vais étudier ces séries de surfaces. Le déterminant orthogonal du réseau M étant désigné par

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

ses rotations ont les valeurs suivantes :

$$a = \cos\theta \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad m = \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial u};$$

$$b = -\frac{\partial\theta}{\partial v} + \cos\theta \sin\varphi, \qquad n = \cos\varphi;$$

où φ et θ satisfont aux équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = 1, \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \sin\varphi \sin\theta \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par x_1, x_2, x_3 les coordonnées de M on devra avoir

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = h\beta_i, \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = lm;$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = l\gamma_i, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hn.$$

Il en résulte que les fonctions h qui correspondent à toutes les surfaces qui ont cette représentation sphérique satisfont à l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v} + mnh.$$

Soit

$$\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{vmatrix}$$

le déterminant orthogonal qui correspond à C_1. Ses rotations sont

$$a' = \cos\varphi \frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad m' = \sin\varphi \frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$b' = -\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \cos\varphi \sin\theta, \qquad n' = -\cos\theta,$$

et l'on a

$$\alpha'_i = \cos\varphi\cos\theta\,\alpha_i + \cos\varphi\sin\theta\,\gamma_i - \sin\varphi\,\beta_i,$$
$$\beta'_i = -\sin\theta\,\alpha_i + \cos\theta\,\gamma_i.$$
$$\gamma'_i = \sin\varphi\cos\theta\,\alpha_i + \sin\varphi\sin\theta\,\gamma_i + \cos\varphi\,\beta_i.$$

Si y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées de C_1 on aura

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h'\beta'_i, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial v} = l'\gamma'_i$$

et la fonction h' est solution de l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 h'}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{m'}\frac{\partial m'}{\partial u}\frac{\partial h'}{\partial v} + m'n'h'.$$

D'autre part, le point C_1 étant dans le plan normal à la première ligne de courbure de M, on aura

$$y_i = x_i + \rho\alpha_i + r\gamma_i.$$

On en déduit facilement les valeurs suivantes de r et ρ :

$$\rho = -\cos\theta\left(\frac{h}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) + \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right),$$
$$r = -\sin\theta\left(\frac{h}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) - \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right);$$

ce qui donne la valeur suivante de h'

$$(4) \qquad h' = -\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\left(\frac{h}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{h}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\right).$$

Si l'on pose pour simplifier

$$h = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad h' = \lambda'\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\lambda'}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}},$$

la relation (4) s'écrit

$$(5) \qquad \lambda' = -\lambda - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2};$$

λ et λ' sont des solutions des équations

$$(6) \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = -\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v},$$

$$(7) \qquad \frac{\partial^2\lambda'}{\partial u\,\partial v} = \sin\varphi\sin\theta\frac{\partial\lambda'}{\partial u} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\lambda'}{\partial v}.$$

A chaque solution λ de l'équation (6), la formule (5) fait correspondre une solution λ' de l'équation (7). Nous avons ainsi une expression $[m, n]$ de M. Darboux. Il est facile d'en trouver la nature. Il faut pour cela trouver les solutions λ de l'équation (6) qui annulent λ'. Or, si λ' est nul, il en est de même de h', la surface (C_1) se réduit à un point, la surface (M) est une sphère, par conséquent

$$h = a = \cos\theta \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \lambda = \cos\theta.$$

Il n'y a donc qu'une seule solution de l'équation (6) qui réduise λ' à zéro; par conséquent λ' peut être réduit au premier ordre par une transformation de Laplace. On vérifie facilement, en effet, que si l'on fait sur l'équation (6) la transformation de Laplace

$$(8) \qquad L = \lambda + \alpha \frac{\partial\lambda}{\partial u}, \qquad \alpha = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta \dfrac{\partial\theta}{\partial u}} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

on a bien, en tenant compte des équations (1),

$$(9) \qquad \lambda' = -L + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial L}{\partial u}.$$

Le passage de la surface (C_1) à la surface (M') se fait de la même manière que le passage de (M) à (C_1). Il en résulte que si λ_1 désigne la valeur de λ qui correspond à la surface (M'), on aura

$$(10) \qquad \lambda_1 = \lambda + B\frac{\partial\lambda}{\partial u} + C\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} + D\frac{\partial^3\lambda}{\partial u^3} + E\frac{\partial^4\lambda}{\partial u^4},$$

B, C, D, E étant des fonctions de u et v qu'il est inutile de calculer. La surface (M') ayant même représentation sphérique que la surface (M), λ_1 sera solution de l'équation (6). *λ_1 est donc une expression (m, n) qui transforme l'équation* (6) *en elle-même*. Il résulte de ce qui précède que cette expression peut être réduite au deuxième ordre par deux transformations de Laplace; il existe donc deux solutions, linéairement distinctes, de l'équation (6) qui rendent λ_1 égal à zéro. Il est facile de trouver ces deux solutions : il y a d'abord la solution $\lambda = \cos\theta$ qui annule λ' et par suite λ_1; il y a ensuite la solution λ qui donne $\lambda' = \cos\varphi$ et qui correspond au cas où la surface (C_1) se réduit à une sphère, solution qu'on peut obtenir par une quadrature.

Je considère au lieu de λ_1 l'expression suivante :

$$(11) \qquad F(\lambda) = A\lambda + B\frac{\partial\lambda}{\partial u} + C\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} + D\frac{\partial^3\lambda}{\partial u^3} + E\frac{\partial^4\lambda}{\partial u^4},$$

où A est une fonction quelconque de u et v et où B, C, D, E ont les mêmes valeurs que dans l'expression (10).

Je vais chercher si cette expression peut se réduire au troisième ordre à l'aide de la transformation (8), c'est-à-dire si l'on peut trouver P, Q, R, S tels que

$$F(\lambda) = PL + Q\frac{\partial L}{\partial u} + R\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} + S\frac{\partial^3 L}{\partial u^3}.$$

Si l'on fait l'identification et si l'on élimine P, Q, R, S entre ces équations, on trouve une relation linéaire homogène entre A, B, C, D, E.

Le coefficient de A dans cette relation est un déterminant dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à α, tous les éléments à gauche de la diagonale sont nuls; si donc B, C, D, E sont donnés, la relation ne peut être satisfaite que pour une seule valeur de A. Nous savons qu'elle est satisfaite pour $A = 1$, *elle ne peut être satisfaite pour d'autres valeurs.*

Maintenant, puisque l'équation (6) admet les solutions λ et λ_1, elle admet la solution

$$\lambda_1 - K\lambda,$$

K étant une constante; cette expression est de la forme $F(\lambda)$, où A a la valeur $1 - K$. D'après ce qui précède, cette expression ne peut pas être réduite au troisième ordre. Donc :

Si K *n'est pas nul, il y a quatre solutions, linéairement distinctes, de l'équation* (6) *qui se reproduisent au facteur* K *près par la transformation* (10).

Au point de vue géométrique, *la surface* (M′) *est homothétique à la surface* M.

Le cas particulier où $K = 1$ mérite une mention particulière. On a alors quatre solutions linéairement distinctes de l'équation (6) pour lesquelles $\lambda_1 = \lambda$. La surface (M′) est égale à la surface (M), et comme elles sont orientées de la même façon, *on passe de* (M) *à* (M′) *par une translation.*

Parmi ces solutions particulières, il en est une qui est évidente, c'est la solution $\lambda = 1$, qui correspond à $h = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$. Dans ce cas, le rayon de courbure de la première ligne de courbure de (M) est égal à l'unité. Les courbes décrites par M et C_1, quand u varie seul, sont telles que chacune d'elles est le lieu des centres de courbure de l'autre. On montre facilement qu'on obtient ainsi toutes les surfaces possédant cette propriété. La surface (M′) coïncide alors avec la surface (M). On détermine ainsi toutes les surfaces qui possèdent la propriété suivante :

Les lignes de courbure d'une série ont leur courbure constante, la valeur de la constante étant la même pour toutes les lignes de la série. (On laisse de côté le cas où les lignes de la série sont formées de cercles égaux.)

Remarque. — La méthode que j'ai développée dans le cas d'une expression (m, n) d'ordre 4 peut s'étendre aux expressions d'ordre quelconque. On peut énoncer le résultat suivant. Soit

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v} \tag{12}$$

une équation dont la suite de Laplace est illimitée et

$$\theta_1 = A\theta + A_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} + A_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n \theta}{\partial u^n}, \tag{13}$$

telle qu'à toute solution θ de l'équation (12) corresponde une solution θ_1 de la même équation. Il y aura, *en général*, n solutions linéairement distinctes de l'équation (12) telles que

$$\theta_1 = K\theta,$$

K étant une constante, et s'il y a exception, c'est-à-dire si le nombre n se réduit, cela ne pourra se présenter que *pour une seule valeur de la constante* K.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le benzofulvanol et le benzofulvène.* Note [1] de MM. V. Grignard et Ch. Courtot [2].

Nous avons fait connaître précédemment [3] une méthode très générale de synthèse d'hydrocarbures colorés qui a pour point de départ la condensation des magnésiens du cyclopentadiène, de l'indène et du fluorène avec les aldéhydes et les cétones. On obtient ainsi des alcools secondaires et tertiaires que nous avons appelés *fulvanols*, *benzofulvanols* et *dibenzo-*

---

(1) Séance du 12 avril 1915.

(2) Communication faite au Congrès de l'A. F. A. S., Le Havre, 1914.

(3) *Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 272, 1493; t. 154, 1912, p. 361; t. 158, 1914, p. 1763.

fulvanols :

CH——CH	——CH	
CH CH	CH	
CH	CH	CH
R_1 >COH R_2	R_1 >COH R_2	R_1 >COH R_2

Ceux-ci, par déshydratation, donnent les hydrocarbures correspondants, *fulvènes*, *benzofulvènes* et *dibenzofulvènes*. Tous ces hydrocarbures, colorés dans la gamme du jaune au rouge, peuvent être considérés théoriquement comme dérivant des trois types fondamentaux ci-dessous :

CH——CH	——CH	
CH CH	CH	
C	C	C
‖	‖	‖
CH^2	CH^2	CH^2
Fulvène.	Benzofulvène.	Dibenzofulvène.

par substitution de l'un ou des deux atomes d'hydrogène méthéniques.

De ces trois prototypes, un seul, jusqu'à présent, paraît être connu, c'est le dibenzofulvène, découvert par Manchot et Krische ([1]); encore les propriétés décrites pour ce corps permettent-elles de concevoir quelques doutes sur sa véritable constitution. Cet hydrocarbure devrait être, en effet, le moins coloré des trois; or, c'est le contraire qui a lieu : il se présente en cristaux rouge-orangé, fusibles sans netteté à 104°-106°. Le terme le plus simple, le fulvène, a été seulement entrevu par Thiele ([2]) qui l'a décrit comme une huile jaune, très oxydable; son avidité pour l'oxygène est telle, en effet, que l'auteur n'a pu indiquer aucune constante.

Il était à prévoir que le benzofulvène serait un peu plus stable que le précédent et qu'avec quelques précautions, il serait possible de l'isoler. Nous y sommes arrivés, en effet, en faisant réagir le magnésien de l'indène sur le trioxyméthylène, ce qui nous a conduits au benzofulvanol que nous avons pu déshydrater catalytiquement.

Benzofulvanol. — Si l'on fait réagir le trioxyméthylène rigoureusement sec sur le bromomagnésien indénique, préparé comme nous l'avons vu anté-

---

([1]) *Lieb. Ann.*, t. 337, 1904, p. 196.

([2]) *D. ch. Ges.*, 1900, p. 666. — THIELE et BALHORN, *Lieb. Ann.*, t. 348, 1906, p. 1.

rieurement et laissé en suspension dans la liqueur toluénique de formation, on obtient toujours un mélange d'alcool et d'hydrocarbure. Cet inconvénient paraît tenir à ce que l'alcool est soumis trop longtemps à l'action de la chaleur pendant l'élimination du toluène.

Pour obtenir de bons résultats, il faut modifier un peu les conditions opératoires. Quand le magnésien indénique est précipité à l'état pulvérulent dans le toluène (1), on laisse reposer et l'on siphonne le liquide, puis on lave rapidement le magnésien une ou deux fois à l'éther anhydre (2) et, finalement, on le met en suspension dans l'éther anhydre. On ajoute alors la quantité correspondante de trioxyméthylène bien sec et l'on chauffe, à reflux, pendant 5 heures environ, en agitant constamment au moyen de l'agitateur mécanique décrit par l'un de nous (3) et en maintenant l'appareil en charge d'hydrogène sec pour éviter toute oxydation. Le précipité finit par disparaître totalement.

On hydrolyse sur de la glace additionnée de chlorhydrate d'ammoniac et d'ammoniaque pour dissoudre la magnésie (Klages). La solution éthérée, incolore, est lavée plusieurs fois à l'eau distillée, puis séchée sur le sulfate de sodium anhydre. On distille alors l'éther en ayant soin que la température du bain-marie ne dépasse pas 50°. Le résidu très peu coloré est constitué uniquement par du benzofulvanol, représentant ainsi un rendement de 85 pour 100; mais en le distillant, même sous un bon vide, il s'en résinifie une portion notable et le rendement en produit pur, distillé, tombe à 70 pour 100.

Le benzofulvanol passe intégralement à 134°, sous 10^{mm}. C'est un liquide visqueux, à odeur de rose (4), parfaitement incolore.

L'analyse a donné les résultats suivants :

	Trouvé.	Calculé pour $C^{10}H^{10}O$.
C	82,1	82,2
H	6,7	6,8

Il fixe 2^{at} de brome, en solution chloroformique, mais nous n'avons pu isoler le dibromure à l'état de pureté.

---

(1) On obtient ce résultat en agitant énergiquement, dans une atmosphère d'hydrogène sec, pendant le refroidissement de la liqueur toluénique où il a pris naissance.

(2) Cette opération se réalise facilement au moyen d'un siphon à robinet et à entonnoir, monté sur un bouchon qui s'adapte au ballon-laboratoire et qui porte un deuxième tube par lequel on fait arriver de l'hydrogène sec. La perte par solubilité dans le toluène et dans l'éther est peu importante.

(3) V. Grignard, *Bull. Soc. chim.*, 1913, p. 952.

(4) Cette odeur est à rapprocher du fait que cet alcool peut être considéré comme un alcool phényléthylique primaire substitué.

Nous devons considérer cet alcool comme l'*α-benzofulvanol*, en raison de son mode de préparation et aussi parce que sa déshydratation régulière le transforme en benzofulvène :

$$C_6H_4\left\{\begin{matrix}CH\\ \|\\ CH\end{matrix}\right.\ \ \begin{matrix}CH\\ |\\ CH^2OH\end{matrix} \rightarrow C_6H_4\left\{\begin{matrix}CH\\ \|\\ CH\end{matrix}\right.\ \ \begin{matrix}C\\ \|\\ CH^2\end{matrix}$$

C'est d'ailleurs un corps assez peu stable ; par conservation prolongée, il devient de plus en plus visqueux et se colore fortement en jaune : il se produit, sans doute, à la fois, une déshydratation et une polymérisation.

Benzofulvène. — Aussi lorsqu'on soumet le benzofulvanol à l'action des déshydratants habituels, chlorure de zinc, acide sulfurique, bisulfate de potassium, dans les conditions les plus variées de concentration et de température, on n'aboutit qu'à des résines.

Nous avons cependant réussi à le déshydrater presque quantitativement en appliquant, dans le vide, la méthode catalytique de Senderens.

L'appareil se compose d'un petit ballon de Wurtz dont la tubulure latérale, réduite à une longueur de 4^{cm} ou 5^{cm}, a été redressée horizontalement et adaptée directement, par un bouchon, à un bout de tube à analyses organiques, de 30^{cm} de longueur environ, continué lui-même par un tube plus étroit débouchant dans un second ballon de Wurtz qui sert de récepteur et de prise de vide. On place le benzofulvanol dans le premier ballon et l'on raccorde la rentrée d'air habituelle à un appareil à gaz carbonique sec. Le tube de Bohême, préalablement garni d'alumine desséchée, exempte d'alcalis, est entouré d'un manchon de toile métallique et chauffé vers 250°. On fait un vide de 15^{mm} à 20^{mm} et l'on distille comme à l'ordinaire.

Le liquide distillé possède une belle couleur jaune d'or et cristallise immédiatement. Rapidement débarrassé d'une trace d'huiles par compression entre deux feuilles de papier-filtre, le nouveau corps se présente en paillettes jaune-verdâtre, fusibles à 37° ; il a une odeur forte rappelant celle du naphtalène, dont il est d'ailleurs un isomère. Il ne réagit plus sur un organomagnésien, ce qui indique qu'il ne retient pas d'alcool primitif ; il fixe avidement le brome et absorbe rapidement l'oxygène, phénomène déjà observé par Thiele sur ses fulvènes. Aussi, pour le conserver, doit-on sceller immédiatement à la lampe le ballon dans lequel on l'a recueilli.

Même dans ces conditions, il se polymérise assez rapidement et se trans-

forme en une masse vitreuse, très dure, d'un beau jaune, rappelant la colophane. Quand on le chauffe, ce polymère prend une teinte de plus en plus foncée qui passe au rouge-brun; il devient pâteux vers 180°, sans fondre nettement.

Quand on place le benzofulvène dans le vide sulfurique, il y possède une forte tension de vapeur et l'acide ne tarde pas à prendre une belle teinte rouge; il s'agit là d'un phénomène d'halochromie qui disparaît par addition d'eau. D'ailleurs, au bout de 2 heures environ, le benzofulvène, placé dans les conditions précédentes, est complètement polymérisé. C'est sur ce polymère qu'a été faite l'analyse :

	Trouvé.	Calculé pour $(C^{10}H^{8})^n$.
C....................	93,2	93,8
H....................	6,6	6,2

Elle témoigne que, malgré les précautions prises, il y a eu déjà absorption d'un peu d'oxygène. Quant au poids moléculaire, il n'a pas été possible de le déterminer, en raison de la faible solubilité de ce polymère dans les dissolvants convenables.

CORRESPONDANCE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes partiels linéaires composés d'équations en nombre égal à celui de leurs fonctions inconnues.* Note de M. **Riquier**, présentée par M. Appell.

I. Si l'on considère un système d'équations aux dérivées partielles, composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et présentant la forme linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, on sait qu'il n'est pas toujours possible de le ramener, par le changement des variables indépendantes, à la forme kowaleskienne : ce fait, constaté à l'aide d'exemples, dépend, comme nous allons l'indiquer, d'une condition simple, à la fois nécessaire et suffisante.

Supposons, pour fixer les idées, que le système dont il s'agit se compose de trois équations, et qu'il implique trois fonctions inconnues, u, v, w, des

variables indépendantes $x, y, \ldots$, en nombre quelconque, les coefficients de ces inconnues et de leurs dérivées, ainsi que les termes indépendants, étant des fonctions données de $x, y, \ldots$. Désignant par m, n, p les ordres respectifs du système par rapport à u, v, w, nous mettrons en évidence, dans chaque équation, trois groupes de termes comprenant respectivement les dérivées d'ordre m de u, les dérivées d'ordre n de v, les dérivées d'ordre p de w; notre système se trouvera ainsi représenté à l'aide des formules

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(i)}_{\alpha,\beta,\ldots} \frac{\partial^m u}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\ldots} \\ \displaystyle+\sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(i)}_{\alpha',\beta',\ldots} \frac{\partial^n v}{\partial x^{\alpha'}\,\partial y^{\beta'}\ldots} + \sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(i)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} \frac{\partial^p w}{\partial x^{\alpha''}\,\partial y^{\beta''}\ldots} + \ldots = 0 \\ \qquad\qquad (i=1,2,3), \end{array}\right.$$

où les lettres U, V, W, affectées d'indices, désignent, d'après ce qui a été dit plus haut, des fonctions données de $x, y, \ldots$. Nous déduirons de là, à l'aide d'un mécanisme évident, le déterminant

$$(2)\quad \left|\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(1)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta\ldots & \displaystyle\sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(1)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'}\ldots & \displaystyle\sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(1)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''}\ldots \\ \displaystyle\sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(2)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta\ldots & \displaystyle\sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(2)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'}\ldots & \displaystyle\sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(2)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''}\ldots \\ \displaystyle\sum_{\alpha+\beta+\ldots=m} U^{(3)}_{\alpha,\beta,\ldots} X^\alpha Y^\beta\ldots & \displaystyle\sum_{\alpha'+\beta'+\ldots=n} V^{(3)}_{\alpha',\beta',\ldots} X^{\alpha'} Y^{\beta'}\ldots & \displaystyle\sum_{\alpha''+\beta''+\ldots=p} W^{(3)}_{\alpha'',\beta'',\ldots} X^{\alpha''} Y^{\beta''}\ldots \end{array}\right|$$

forme algébrique de degré $m+n+p$ en X, Y, ..., ayant elle-même pour coefficients des fonctions données de $x, y, \ldots$.

Cela étant, et *des valeurs initiales déterminées*, $x_0, y_0, \ldots$, *ayant été choisies pour les variables indépendantes* $x, y, \ldots$, *pour que le système* (1) *soit, par un changement des variables, réductible à la forme kowaleskienne, il faut et il suffit qu'en introduisant dans les fonctions* U, V, W *l'hypothèse numérique initiale*

$$x, y, \ldots = x_0, y_0, \ldots,$$

la forme algébrique (2) *ne devienne pas identiquement nulle, quels que soient* X, Y, ...

II. Supposons actuellement que les coefficients du système (1) et les fonctions u, v, w qui s'y trouvent engagées ne dépendent que de deux

variables x, y; supposons, de plus, que les équations (1) ne contiennent, outre les termes indépendants de u, v, w et de leurs dérivées, que les dérivées d'ordre m de u, les dérivées d'ordre n de v et les dérivées d'ordre p de w, à l'exclusion des dérivées d'ordres respectivement inférieurs et des fonctions inconnues elles-mêmes; supposons enfin que les dérivées de u, v, w d'ordres respectifs m, n, p y aient pour coefficients des constantes. Le système (1) est alors de la forme

$$(3) \quad \left\{ \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{i,\mu} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-\mu}\,\partial y^{\mu}} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{i,\nu} \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-\nu}\,\partial y^{\nu}} + \sum_{\varpi=0}^{\varpi=p} c_{i,\varpi} \frac{\partial^p w}{\partial x^{p-\varpi}\,\partial y^{\varpi}} = G_i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3), \right.$$

où $G_i(x, y)$ désigne une fonction donnée de x, y, et les lettres a, b, c, affectées d'indices, des constantes données; il en résulte, pour la forme algébrique (2), dont les coefficients, en pareil cas, se réduisent eux-mêmes à des constantes, l'expression

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{1,\mu} X^{m-\mu} Y^{\mu} & \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{1,\nu} X^{n-\nu} Y^{\nu} & \sum_{\varpi=0}^{\varpi=p} c_{1,\varpi} X^{p-\varpi} Y^{\varpi} \\ \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{2,\mu} X^{m-\mu} Y^{\mu} & \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{2,\nu} X^{n-\nu} Y^{\nu} & \sum_{\varpi=0}^{\varpi=p} c_{2,\varpi} X^{p-\varpi} Y^{\varpi} \\ \sum_{\mu=0}^{\mu=m} a_{3,\mu} X^{m-\mu} Y^{\mu} & \sum_{\nu=0}^{\nu=n} b_{3,\nu} X^{n-\nu} Y^{\nu} & \sum_{\varpi=0}^{\varpi=p} c_{3,\varpi} X^{p-\varpi} Y^{\varpi} \end{vmatrix}.$$

Cela étant, et *la forme algébrique* (4) *étant supposée non identiquement nulle, l'intégration du système* (3) *se ramène à des quadratures.*

NOMOGRAPHIE. — *De l'anamorphose circulaire.* Note de M. **Rodolphe Soreau**, présentée par M. Appell.

Définition. — L'anamorphose de Lalanne a pour objet de chercher si et comment une équation à trois variables $E(z_1, z_2, z_3) = 0$, que j'écrirai $E_{123} = 0$, peut être représentée par un abaque formé de droites. La solution de ce problème est intimement liée à ma notion de l'ordre nomographique [1].

---

[1] *L'anamorphose et l'ordre nomographique* (*Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, 1914).

Généralisant cette anamorphose, qu'on pourrait appeler *linéaire*, je définis anamorphose *circulaire* celle qui a pour objet de chercher si et comment $E_{123} = 0$ peut être représentée par un abaque formé de cercles.

But de cette Note. — Je me propose : 1° de déterminer une forme canonique, c'est-à-dire telle que, si l'on suppose $E_{123} = 0$ réduite à cette forme, il existe une méthode réalisant l'anamorphose circulaire, ou montrant qu'elle est impossible; 2° d'exposer une telle méthode.

Forme générale des équations. — Soient

$$\varepsilon_n(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta) + \frac{x}{l} f_n + \frac{y}{m} g_n + \frac{1}{p} h_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3)$$

les équations des cercles; ε_1, ε_2, ε_3 figurent les nombres 0 ou 1. Posons

$$D = |f_n g_n h_n| \qquad D_f = |\varepsilon_n g_n h_n| \qquad D_g = |f_n \varepsilon_n h_n| \qquad D_h = |f_n g_n \varepsilon_n|.$$

La règle de Cramer donne

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = \frac{-D}{pD_h}, \qquad \frac{x}{l} = \frac{D_f}{pD_h}, \qquad \frac{y}{m} = \frac{D_g}{pD_h},$$

d'où la forme générale [1] :

$$(1) \qquad l^2 D_f^2 + m^2 D_g^2 + n D_f D_g + p D_h D = 0,$$

avec $|n| < |2lm|$. On aura réalisé l'anamorphose circulaire d'une équation si on l'a réduite à cette forme, la disjonction des variables étant *effectivement* opérée par les déterminants D, D_f, D_g, D_h dont le premier fournit les équations des cercles.

Forme canonique. — La relation (1) est de la forme

$$(2) \qquad F_{123}^2 + G_{123}^2 + H_{123} = 0,$$

où F_{123}, G_{123} peuvent être ordonnés nomographiquement. Telle est la forme canonique cherchée.

La méthode pour l'anamorphoser, ou constater que l'anamorphose est impossible, est basée sur la règle suivante, qui généralise, pour les *fonctions*

---

(1) Cette méthode d'élimination, appliquée aux équations

$$(x^2 + y^2) + xf_n + yg_n + h_n = 0,$$

donne de suite la relation suivante, établie différemment par M. d'Ocagne :

$$D_f^2 + D_g^2 + D_h D = 0.$$

ordonnées

$$F_{123} = f_{12} f_3 + g_{12} g_3 + h_{12} h_3,$$

la règle de Clark pour les *équations* ordonnées $F_{123} = 0$: la disjonction des variables de F_{123} est possible si l'élimination de z_1, puis de z_2, entre les équations

$$x = \frac{f_{12}}{h_{12}}, \quad y = \frac{g_{12}}{h_{12}},$$

donne deux équations linéaires en x et y

$$x f_n + y g_n + h_n = 0 \qquad (n = 1, 2).$$

Cette disjonction est alors

$$F_{123} = k\,|f_n g_n h_n| \qquad (n = 1, 2, 3).$$

Cela étant, pour que l'anamorphose circulaire de la forme canonique (2) soit possible, il faut et il suffit :

1° Qu'en ordonnant F_{123} et G_{123}, on obtienne des formes telles que

$$F_{123} = f_{12} \varepsilon_3 + g_{12} g_3 + h_{12} h_3, \qquad G_{123} = \varphi_{12} f_3 + \psi_{12} \varepsilon_3 + \xi_{12} h_3;$$

2° Qu'on puisse opérer la disjonction des variables de ces fonctions ordonnées, ce qu'on reconnaîtra en appliquant la règle ci-dessus;

3° Que ces disjonctions soient de la forme

$$F_{123} = l\,|\varepsilon_n g_n h_n|, \qquad G_{123} = m\,|f_n \varepsilon_n h_n|$$

(s'il en est ainsi, on en déduira les déterminants D et D_h);

4° Qu'il existe deux nombres n et p (avec $|n| < |2\,lm|$) tels que

$$H_{123} = n D_f D_g + p D_h D.$$

Forme canonique dans le cas de deux faisceaux de droites et un faisceau de cercles. — On a dans ce cas

$$D = D_f f_3 + D_g g_3 + D_h h_3,$$

D_f, D_g, D_h étant des fonctions de z_1 et z_2. La relation (1) peut donc s'écrire

$$l^2 \frac{D_f^2}{D_h^2} + m^2 \frac{D_g^2}{D_h^2} + n \frac{D_f}{D_h} \frac{D_g}{D_h} + p \left(\frac{D_f}{D_h} f_3 + \frac{D_g}{D_h} g_3 + h_3 \right) = 0,$$

d'où la forme canonique suivante, où $|r|$ est inférieur à 1 :

$$F_{12}^2 + G_{12}^2 + 2 r F_{12} G_{12} + F_{12} f_3 + G_{12} g_3 + h_3 = 0.$$

Pour que l'anamorphose circulaire soit possible, il faut et il suffit que, si l'on pose

$$x = F_{12}, \qquad y = G_{12},$$

l'élimination de z_1, puis de z_2, donne deux relations linéaires en x et y. C'est le cas, par exemple, lorsque F_{12} et G_{12} sont de la forme

$$F_{12} = \frac{a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3}{c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3}, \qquad G_{12} = \frac{b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3}{c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3}.$$

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Sur la figure piriforme d'équilibre d'une masse fluide.* Note [1] de M. **Pierre Humbert**, présentée par M. Appell.

Proposons-nous de rechercher directement, en suivant les méthodes de Poincaré, si la section par un plan de symétrie de la figure piriforme d'équilibre pour une masse fluide en rotation présente des points d'inflexion, comme le croyait Poincaré [2], tandis que le calcul qu'a fait G.-H. Darwin [3] par des méthodes différentes fait prévoir le contraire.

Soient a, b, o les axes de l'ellipsoïde de référence, α la constante positive et inférieure à b telle que la fonction $R = \rho(\rho^2 - \alpha)$ soit une fonction de Lamé correspondant à la valeur $n = 3$ du paramètre de l'équation différentielle, et A, B, C, $(A < B < C)$ les axes du jacobien critique correspondant. Le déplacement normal à partir d'un point xyz de ce jacobien est, en première approximation,

$$\zeta = \varepsilon z \left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha} - 1 \right),$$

où ε est une constante arbitraire, mais petite.

On en déduit les coordonnées X, Z, d'un point de la section de la figure piriforme par le plan des xz :

$$X = x + \frac{\varepsilon C x z}{A} \left(\frac{C^2}{A^2} x^2 + \frac{A^2}{C^2} z^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{z^2}{\alpha} - 1 \right),$$

et une expression analogue pour Z. En introduisant l'anomalie excen-

---

(1) Séance du 12 avril 1915.

(2) *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 161, et *Mémoire* du Tome 7 des *Acta mathematica*.

(3) *Scientific Papers*, Vol. 3 : *On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid.*

trique φ de l'ellipse méridienne :

$$X = \cos\varphi(A + CH\sin\varphi),$$
$$Z = \sin\varphi(C + AH\sin\varphi),$$
$$H = C\varepsilon\left(\frac{A^2\cos^2\varphi}{\alpha - a^2} + \frac{C^2\sin^2\varphi}{\alpha} - 1\right)(C^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Les valeurs des diverses constantes ont été données par Darwin

$$A^2 = 0,42, \qquad C^2 = 3,53, \qquad a^2 = 3,11, \qquad \alpha = 1,76,$$

le volume du Jacobien étant égal à $\frac{4\pi}{3}$.

D'autre part, Darwin a remarqué que la distance du sommet du grand axe du Jacobien au sommet du piroïde devait être inférieure à la différence entre ce grand axe C et le z des points de rencontre de la section du piroïde avec l'ellipse principale. Cette inégalité permet d'assigner comme limite supérieuse à ε la valeur $+0,25$. Il est alors facile de voir que l'expression

$$\frac{dZ}{d\varphi}\frac{d^2X}{d\varphi^2} - \frac{dX}{d\varphi}\frac{d^2Z}{d\varphi^2}$$

ne peut s'annuler. Si on la calcule, on remarquera en effet qu'elle se compose de trois termes : le premier est constant; le second, toujours positif, contient ε^2 en facteur, il sera donc petit; le troisième, qui contient ε en facteur, a un minimum négatif, pour $\cos^2\varphi = 0,248$, et sa valeur est alors $-6,71\,\varepsilon$. Même dans ce cas extrême, et pour la valeur extrême $\varepsilon = 0,25$, l'expression totale est encore positive, étant égale à $+0,21$. Il ne peut donc y avoir de points d'inflexion, et les calculs de Poincaré, poussés jusqu'au bout, conduisent bien au résultat de Darwin.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Modification des figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide en rotation sous l'action de la pression capillaire.* Note de M. **B. Globa-Mikhaïlenko**, présentée par M. Appell.

1° Imaginons une masse fluide en rotation uniforme autour de OX, dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton et à la surface de laquelle agit une pression capillaire proportionnelle à la courbure moyenne de la surface. Si U est la fonction des forces, nous aurons les conditions d'équilibre :

A l'intérieur

$$p = U + \text{const.};$$

A la surface

$$p_0 = \alpha = U + \text{const.},$$

α désignant la pression capillaire.

Supposons que E_0 soit l'ellipsoïde qu'affecterait notre masse fluide comme figure d'équilibre sans la pression capillaire. Ajoutant la pression capillaire α que nous supposons infiniment petite, la figure ellipsoïdale d'équilibre se déformera, et nous pouvons obtenir cette déformation en ajoutant à l'ellipsoïde E_0 une couche homogène d'épaisseur ζ. Employant les notations de Poincaré (*Figures d'équilibre d'une masse fluide*), nous développons $\zeta : l$ en une série de fonctions de Lamé, ce qui donne

$$\zeta = l\,\Sigma a_i M_i N_i.$$

Supposons encore que, la déformation étant infiniment petite, la courbure moyenne sur la nouvelle surface soit la même fonction des angles polaires que sur l'ellipsoïde E_0; nous aurons

$$\begin{aligned}\alpha &= -\mu R_1 R_2 R_3 (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - x^2 - y^2 - z^2)\left[\frac{R_2^2 R_3^2}{R_1^2} x^2 + \frac{R_1^2 R_3^2}{R_2^2} y^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^2} z^2\right]^{-\frac{3}{2}}\\ &= -\mu R_1 R_2 R_3 \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2 \cos^2\theta - R_2^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi - R_3^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{[R_2^2 R_3^2 \cos^2\theta + R_1^2 R_3^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

μ étant un petit facteur positif (*Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 233). Développons enfin α en une série de fonctions de Lamé :

$$\alpha = \Sigma c_i M_i N_i.$$

2° Cela posé, reprenons l'équation à la surface

$$U - \alpha = \text{const.}$$

Nous savons (Poincaré, *ibid.*) que, U_0 étant la fonction des forces sur E_0, cette fonction sur la surface de la nouvelle figure sera $U = U_0 - g\zeta$. En désignant par v le potentiel de la couche ζ, nous aurons aussi

$$v = \sum \frac{4\pi}{2n+1} a_i R_i^0 S_i^0 M_i N_i.$$

Et comme U_0 est constante sur E_0, l'équation d'équilibre devient

$$v - g\zeta - \alpha = \text{const.}$$

Nous avons aussi (POINCARÉ, *ibid.*) $gl = \frac{4}{3}\pi R_1^0 S_1^0$, alors

$$g\zeta = \frac{4}{3}\pi R_1^0 S_1^0 \Sigma a_i M_i N_i$$

et l'équation d'équilibre devient définitivement

$$4\pi \Sigma a_i \left[\frac{R_i S_i}{2n+1} - \frac{R_1 S_1}{3}\right] M_i N_i = \Sigma c_i M_i N_i = \text{const},$$

L'identification des coefficients nous donne alors

$$a_i = \frac{c_i}{4\pi}\left[\frac{R_i S_i}{2n+1} + \frac{R_1 S_1}{3}\right]^{-1} = \frac{c_i}{4\pi\omega_i}.$$

3° Pour calculer C_i nous avons la formule

$$c_i = \left[\int \alpha M_i N_i \, l \, d\sigma\right] : \left[\int (M_i N_i)^2 \, l \, d\sigma\right].$$

Le calcul montre que C_i n'est différent de zéro que lorsque $M_i N_i$ est de la forme $f(\mu^2).f(\nu^2)$, et que les premiers coefficients non nuls correspondent à $i = 7$ et $i = 8$. Ce sont les termes principaux, et nous aurons approximativement

$$\zeta = l[a_7 M_7 N_7 + a_8 M_8 N_8].$$

On voit facilement que

$$M_7 N_7 = \frac{(\alpha_1 - a^2)(\alpha_1 - b^2)(\alpha_1 - c^2)}{\rho^2 - \alpha_1}\left[\frac{R_1^2 \cos^2\theta}{\alpha_1 - a^2} + \frac{R_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{\alpha_1 - b^2} + \frac{R_3^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{\alpha_1 - c^2} - 1\right];$$

de même on trouve $M_8 N_8$ en changeant α_1 en α_2, où α_1 et α_2 sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0 \qquad (a^2 > \alpha_1 > b^2 > \alpha_2 > c^2).$$

Posant

$$h_7 = (\alpha_1 - a^2)(\alpha_1 - b^2)(\alpha_1 - c^2)(\rho^2 - \alpha_1)^{-1} \quad \text{et} \quad A_7 = \int (M_7 N_7)^2 \, l \, d\sigma,$$

et remarquant que $l\,d\sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$, on a

$$a_7 = -\frac{\mu R_1 R_2 R_3 h_7}{4\pi.\omega_7 A_7}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2\cos^2\theta - R_2^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi - R_3^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{[R_2^2 R_3^2 \cos^2\theta + R_1^2 R_3^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\times \left[\frac{R_1^2 \cos^2\theta}{\alpha_1 - a^2} + \frac{R_2^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi}{\alpha_1 - b^2} + \frac{R_3^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{\alpha_1 - c^2} - 1\right] \sin\theta \, d\theta.$$

Le calcul montre que l'intégrale est positive, ainsi que

$$\omega_7 = \int_0^\infty \left(\frac{\rho^2-\alpha_1}{x^2-\alpha_1} - \frac{\rho^2-a^2}{x^2-a^2}\right) \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)}} > 0.$$

On obtient a_8 en changeant α_1 en α_2. Appelant I_1 et I_2 les deux intégrales, déterminant a_7 et a_8, on a finalement

$$\zeta = -\frac{\mu R_1 R_2 R_3 l}{4\pi}\left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7\omega_7}\left(\frac{x^2}{\alpha_1-a^2}+\frac{y^2}{\alpha_1-b^2}+\frac{z^2}{\alpha_1-c^2}-1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{h_8^2 I_2}{A_8\omega_8}\left(\frac{x^2}{\alpha_2-a^2}+\frac{y^2}{\alpha_2-b^2}+\frac{z^2}{\alpha_2-c^2}-1\right)\right].$$

Remarquant que $\alpha_1-a^2<0$; $\alpha_1-b^2>0$; $\alpha_1-c^2>0$; $\alpha_2-a^2<0$; $\alpha_2-b^2<0$; $\alpha_2-c^2>0$, nous voyons que sur le petit axe (OX) ζ_x est toujours positive, sur le grand axe (OZ) ζ_z est toujours négative et sur l'axe moyen (OY) ζ_y est négative pour l'ellipsoïde se rapprochant de l'ellipsoïde de révolution et devient positive pour l'ellipsoïde assez allongé. On voit encore que, pour les ellipsoïdes infiniment aplatis ou allongés, ζ devient infiniment grand d'ordre élevé, ce qui montre que, quelque petite que soit la pression capillaire, les figures infiniment minces sont impossibles.

4° Pour l'ellipsoïde de révolution $a_8=0$, I_1 et A_7 se calculent facilement. On trouve alors

$$\zeta = -\delta\frac{1-3\cos^2\theta}{\sqrt{(R_1^2+R_2^2-R_1^2)\cos^2\theta}}.$$

Ainsi, sur le petit axe, $\zeta_x=\delta 2 R_2^{-1}$ et sur le grand axe $\zeta_y=\delta . R_1^{-1}$, δ étant un facteur positif ne dépendant que de R_1 et R_2, et devenant infini pour l'ellipsoïde infiniment aplati.

AÉRODYNAMIQUE. — *Sur les moteurs à vent.* Note de M. **Drzewiecki**, présentée par M. L. Lecornu.

Appliquant à l'étude du moteur à vent la méthode que nous avons suivie pour celle de l'aile d'un propulseur hélicoïdal [1], considérons un élément d'aile résultant de l'intersection de l'aile par un cylindre de rayon ρ, ayant pour axe l'axe de rotation OX; cet élément tourne autour de cet axe à raison de n tours : sec, et est soumis à l'action d'un vent soufflant avec

[1] *Comptes rendus*, t. 114, 1892, p. 820; *Bulletin de l'Association technique maritime*, 1892, 1900 et 1901.

une vitesse de V mètres : sec dans la direction de l'axe. Pour tous les points de cet élément, la direction du vent relatif sera la résultante de la vitesse du vent V et de la vitesse tangentielle périphérique de l'élément $2\pi n\rho$. Appelant β l'angle de cette résultante avec la direction OX, nous aurons la relation

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{2\pi n\rho}{V}.$$

L'élément en question est orienté, sur le rayon ρ, de façon à faire, avec une direction parallèle à OX, un angle $\beta + \alpha$, de sorte que son incidence sur le vent relatif sera α. Projetant sur l'axe OY les deux composantes R_x et R_y (¹) de la résistance éprouvée par l'élément de la part de l'air en mouvement, et multipliant ces projections par la vitesse périphérique, nous obtiendrons l'expression de la puissance utile développée par l'élément et qui est

$$dP_n = R_y\left(\cos\beta - \frac{R_x}{R_y}\sin\beta\right)2\pi n\rho;$$

exprimant le tout en fonction de $\operatorname{tang}\beta$, que, pour la simplification des écritures, nous désignerons par z, nous aurons

$$dP_n = R_y V\left(1 - \frac{R_x}{R_y}z\right)z\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

La résistance

$$R_y = SW^2K_y,$$

où S est la surface de l'élément, $S = L\,d\rho$, en désignant par L sa largeur; la vitesse résultante $W = \frac{V}{\cos\beta}$ et K_y est la composante sustentatrice unitaire dépendant de la section de l'élément et de son incidence α; de plus, le rapport $\frac{R_x}{R_y}$ peut être remplacé par $\frac{K_x}{K_y}$. Substituant ces valeurs dans l'expression de dP_n, on trouve

$$dP_n = \frac{LV^4K_y}{2\pi n}\left(1 - \frac{K_x}{K_y}z\right)z\sqrt{1+z^2}\,dz.$$

Adoptant pour la largeur L de l'aile une largeur constante qui serait une fraction de la longueur du rayon, $\frac{1}{6}$ par exemple,

$$L = \frac{r}{6} = \frac{VZ}{12\pi n},$$

(¹) Notation du laboratoire Eiffel.

où Z est la valeur de tang β qui correspond à l'extrémité de l'aile, et admettant que l'aile est constituée par la juxtaposition le long du rayon ρ d'éléments semblables à l'élément considéré et orientés tous de la même façon que lui par rapport à la résultante des vitesses, de sorte que le rapport $\frac{K_x}{K_y}$ est partout le même, on trouvera l'expression de la puissance utile d'un moteur à vent ayant un nombre a d'ailes, en intégrant l'expression de dP_n entre les limites $z_0 = 1$ et $z_1 = Z$,

$$P_n = \frac{aV^5 K_y Z}{24\pi^2 n^2} \int_1^Z \left(1 - \frac{K_x}{K_y} z\right) z\sqrt{1+z^2}\, dz:$$

effectuant l'intégration entre les limites indiquées, on trouve

$$\frac{1}{3}\sqrt{1+Z^3} - 0,94 + \frac{K_x}{K_y}\left[\frac{1}{8} Z(1+2Z^2)\sqrt{1+Z^2} - \mathcal{L}\left(Z+\sqrt{1+Z^2}\right) - 0,64\right].$$

Désignant par $-$ A le terme qui multiplie $\frac{K_x}{K_y}$ et par B le deuxième terme, on a

$$P_n = \frac{aV^5 K_y Z}{24\pi^2 n^2}\left(B - \frac{K_x}{K_y} A\right).$$

A et B sont positifs dans les limites de l'intégration.

Discutant cette expression on voit qu'avec l'augmentation de Z à partir de $Z = 1$, les valeurs de P_n sont positives, qu'elles augmentent rapidement à partir d'une valeur zéro, et que P_n redevient zéro pour une valeur de Z telle que $B = \frac{K_x}{K_y} A$. La valeur de P_n passe donc évidemment par un maximum. Pour le trouver il faudrait égaler à zéro la dérivée de l'expression, ce qui mène à une équation transcendante dont il est impossible de trouver les racines, aussi est-il préférable de remplacer avant dérivation les termes A et B par des fonctions plus simples de Z. Nous avons trouvé que les fonctions exponentielles

$$A' = 0,282\, Z^{3,95} \qquad \text{et} \qquad B' = 0,376\, Z^{2,95}$$

satisferaient à ces conditions avec une approximation très suffisante : ce qui permet d'écrire l'expression sous la forme

$$P_n = \frac{aK_y V^5}{47240\, n^2}\left(1 - 0,75\,\frac{K_x}{K_y} Z\right) Z^{3,95}.$$

En égalant à zéro la dérivée de cette expression on trouve que le maximum

de P_n correspond à

$$Z = 1064 \frac{K_y}{K_x}.$$

Z étant proportionnel à la longueur de l'aile il en résulte que, pour que le moteur donne le maximum de sa puissance, cette longueur ne doit pas dépasser une limite déterminée, et il peut arriver que de deux moulinets ayant des ailes identiques, mais de longueur différente, c'est celui dont le diamètre est le plus petit qui sera le plus puissant. Au moyen de l'équation ci-dessus il est facile de déterminer tous les éléments d'une aile d'un moteur à vent, étant données ses conditions de fonctionnement V, n et P_n, et aussi les caractéristiques du type d'aile adopté K_y et $\frac{K_x}{K_y}$, déterminés par des essais de laboratoire. Il y a lieu de remarquer que, contrairement à ce qui a lieu pour les hélices propulsives, il n'y a pas à rechercher des incidences donnant le minimum du rapport $\frac{K_x}{K_y}$, mais au contraire adopter des incidences considérables, de 15° à 20° par exemple, réalisant les plus fortes poussées K_y possibles, afin d'obtenir le maximum de puissance utile, mais en ayant soin de donner à l'aile une longueur qui ne fasse pas dépasser le rapport Z maximum, pour un vent donné et un nombre de tours déterminés.

PHYSIQUE. — *Sur la vitesse du son dans les mélanges gazeux.* Note de M. A. **Leduc**, présentée par M. E. Bouty.

Dans la formule classique $V = \sqrt{Ev}$ remplaçons E par $\frac{\gamma}{\mu}$ et v par sa valeur tirée de l'équation (1) de ma Note du 15 mars [1]. Nous avons [2]

$$V = \sqrt{\frac{RT}{M}\gamma\frac{\varphi}{p\mu}} \tag{10}$$

ou, en utilisant les relations (2) et (3) de la même Note,

$$V = \sqrt{\frac{RT\varphi}{M}\gamma\frac{\varphi}{1+nP^2}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}\gamma\frac{\varphi}{1+nP^2}} \tag{10 bis}$$

Remplaçant ρ par $\rho_1 + \rho_2$, calculés au moyen de (1), puis γ et φ par leurs

(1) *Comptes rendus*, t. **160**, 1915, p. 338.

(2) *Comptes rendus*, t. **127**, 1898, p. 661, et *Ann. de Chim. et de Phys.*, t. **17**, p. 492.

valeurs tirées de (9) et (6), on a finalement, en négligeant nP^2,

$$(11)\quad V = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\sqrt{r_1 \varphi_2 + r_2 \varphi_1}} \sqrt{\frac{RT}{r_1 M_1 \varphi_2 + r_2 M_2 \varphi_1} \left[1 + \frac{(r_1 k_1 + r_2 k_2)(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{r_1 k_1 (\gamma_2 - 1) + r_2 k_2 (\gamma_1 - 1)} \right]}.$$

Dans un mélange de gaz quasi parfaits on a simplement

$$(11\ bis)\qquad V = \sqrt{\frac{RT}{r_1 M_1 + r_2 M_2} \left[1 + \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{r_1(\gamma_2 - 1) + r_2(\gamma_1 - 1)} \right]}.$$

Application à l'air humide. — On trouve aisément que, pour $r_2 = 0,02$, la vitesse du son est augmentée de 0,0029 de sa valeur dans l'air sec à la même température. La correction à apporter à la vitesse observée dans l'air saturé pour la « réduire à l'air sec » atteint 1^m au voisinage de $17°,7$. Elle est de $0^m,71$ à $0^m,72$ pour l'air saturé à $12°,5$.

Vitesse du son dans l'acide carbonique (Les expériences de Regnault sur la). — La troisième série des expériences faites dans les tuyaux de $10^{cm},8$ de diamètre de la route militaire ([1]) a donné pour moyenne, à $13°,3$, $V = 268,50$ m : sec. La pression totale était $763^{mm},5$ et la pression de la vapeur d'eau $10^{mm},46$. Regnault en déduit pour la vitesse dans le gaz sec à 0° : $V_0 = 260^m,41$.

La vitesse dans l'air sec à 0°, dans ce même tuyau, étant $V'_0 = 331^m,91$, le rapport $\frac{V_0}{V'_0} = 0,7848$ est un peu plus faible que celui prévu par la théorie de Newton : $\sqrt{\frac{1}{1,529}} = 0,8087$. « On doit en conclure, dit Regnault, que la vitesse réelle est un peu moindre que celle déduite de la théorie. *On ne peut attribuer cette différence à une impureté du gaz; car il ne pouvait s'y trouver que de l'air, qui aurait augmenté la vitesse.* Elle est due à ce que l'acide carbonique s'éloigne beaucoup plus que l'air de l'élasticité parfaite. »

On voit que Regnault ne tient pas compte de la différence des γ du gaz carbonique et de l'air, et cette omission est ici très importante. Calculons, en effet, le rapport $\frac{V_0}{V'_0}$ au moyen de la formule (10 *bis*), qui tient compte aussi de l'imperfection des gaz. On a, nP^2 étant négligeable,

$$\frac{V_0}{V'_0} = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\varphi}{\varphi'}} = \sqrt{\frac{1}{1,529} \times \frac{1,319}{1,405} \times \frac{0,9934}{0,9994}} = 0,7812$$

qui est inférieur au rapport expérimental.

([1]) *Relation des expériences relatives aux machines à feu*, t. 3, p. 130.

Le gaz préparé par Regnault renfermait donc de l'air, et nous pouvons déterminer en quelle proportion en partant de la donnée expérimentale immédiate à 13°,3.

Si x désigne la richesse du mélange en air, et r_2 la richesse en vapeur d'eau (0,015), la richesse en gaz carbonique est $r_1 = 1 - r_2 - x = 0,985 - x$. La formule (11) appliquée sous sa forme primitive

$$\text{(11 bis)} \qquad V^2 = \frac{RT}{\sum \frac{r_n}{\varphi_n} \sum \frac{r_n M_n}{\varphi_n}} \left[1 + \frac{\sum k_n r_n}{\sum \frac{k_n r_n}{\gamma_n - 1}} \right]$$

donne, après réductions et approximations justifiées,

$$V^2 = \frac{RT}{(1,0050 - 0,004x)(43,833 - 15,26x)} \left[1 + \frac{1,0355 - 0,0304x}{3,287 - 0,806x} \right]$$
$$= RT \frac{1,315 + 0,068x}{44,052 - 15,5x}.$$

Dans l'air sec à 13°,3, on a

$$V'^2 = \frac{RT}{M} \gamma \varphi^2 = \frac{RT}{20,626}$$

et d'autre part

$$V' = 331 \sqrt{1 + 0,00367 \times 13,3} = 339,92.$$

On doit donc avoir

$$\frac{1,315 + 0,068x}{44,052 - 15,5x} \times 20,626 = \left(\frac{268,50}{339,92} \right)^2,$$

d'où l'on tire $x = 0,033$.

Ce gaz, que Regnault considérait comme sensiblement pur, renfermait donc environ 3 pour 100 d'air. Le gaz préparé plus tard (*loc. cit.* p. 170) était encore plus impur.

Grisoumètre acoustique. — L'auteur [1] fait parler simultanément deux tuyaux identiques alimentés, l'un par de l'air atmosphérique, l'autre par de l'air grisouteux. La richesse en méthane serait déterminée par le nombre des battements par seconde *si les deux tuyaux étaient bien à la même température, et si l'air de la mine ne différait de l'air atmosphérique que par l'addition de méthane pur.*

C'est d'ailleurs sur un tel mélange que l'auteur fait ses essais, et il

---

[1] *Comptes rendus*, t. **117**, 1893, p. 573; t. **121**, 1895, p. 1116.

constate par exemple que 12 pour 100 de méthane donnent lieu à 9 battements par seconde avec des tuyaux donnant ut_4.

Proposons-nous de calculer ce nombre de battements en admettant que les deux gaz étaient secs ou également humides. La vitesse du son dans ce mélange peut se calculer par la formule (11 *bis*), car les deux gaz sont quasi parfaits.

En ce qui concerne γ_2, Capstick ([1]) donne 1,313, en partant de $\gamma_1 = 1,408$ pour l'air. Nous prendrons donc $\gamma_2 = 1,310$. De là

$$V = \sqrt{\frac{RT}{0,88 \times 28,95 + 0,12 \times 16,034}\left[1 + \frac{0,310 \times 0,405}{0,88 \times 0,310 + 0,12 \times 0,405}\right]}.$$

On en déduit aisément l'intervalle des deux sons

$$\frac{N}{N'} = \frac{V}{V'} = 1,0219$$

et, comme $N = 522$, on a $N' = 533,5$.

L'auteur aurait donc dû observer 11,5 battements par seconde, au lieu de 9, si son méthane eût été pur.

Remarquons toutefois que $\gamma_2 = 1,310$ nous semble bien élevé pour un gaz penta-atomique quasi parfait, et il se pourrait que le gaz de M. Capstick fût souillé d'impuretés diatomiques. Pour que le résultat de M. Hardy fût exact, il faudrait que γ_2 fût compris entre 1,25 et 1,26, et cela ne semble pas impossible.

PHYSICO-CHIMIE. — *Cinétique des réactions photochimiques.* Note ([2]) de M. **Daniel Berthelot**, transmise par M. E. Jungfleisch.

Les divers modes d'énergie peuvent être mis sous forme de produits de deux facteurs : une intensité (ou potentiel) et une capacité. En général (énergie électrique, capillaire, etc.), chacun des facteurs a un sens physique simple. Mais dans le cas de l'énergie calorifique, l'expérience donne seulement le produit Q des deux facteurs, et le facteur d'intensité T (température); quant au facteur de capacité, l'entropie $S = \int \frac{dQ}{T}$, il n'est pas directement mesurable.

([1]) *Chem. News*, t. 68, 1893, p. 39.

([2]) Séance du 12 avril 1915.

J'ai examiné il y a quelques années ([1]) le cas de l'énergie rayonnante à ce point de vue général et montré qu'il est analogue à celui de l'énergie calorifique. L'expérience donne immédiatement l'énergie globale W et le facteur d'intensité, qui n'est autre que la fréquence vibratoire N. Pour le facteur de capacité, j'ai introduit la notion d'entropie rayonnante

$$H = \int \frac{dW}{N},$$

dont les propriétés sont parallèles à celles de l'entropie thermique.

Quand les particules d'un corps sont élevées à un certain potentiel énergétique, elles prennent une vitesse dont l'expression générale a la même forme pour les divers modes d'énergie.

Considérons d'abord le cas de la chute des corps. Soit un corps de poids p et de masse m. Le facteur de capacité de l'énergie de pesanteur est le poids; le facteur d'intensité est le niveau $\mathcal{H}$ (hauteur de chute) :

$$(1) \qquad \frac{1}{2} m v^2 = p\mathcal{H}, \qquad v = \sqrt{2 \frac{p}{m} \mathcal{H}}.$$

Envisageons l'énergie thermique. Les molécules d'un gaz portées à la température absolue T prennent une vitesse de translation v :

$$(2) \qquad \frac{1}{2} m v^2 = sT, \qquad v = \sqrt{2 \frac{s}{m} T};$$

s représente le facteur de capacité de l'énergie thermique : c'est la capacité calorifique d'un gaz monoatomique; rapportée à la molécule-gramme, la valeur de ce facteur en unités C. G. S. est $\frac{3}{2} R = 1,25 \times 10^8$. Si l'on divise ce nombre par 62×10^{22} (nombre de molécules contenues dans la molécule-gramme), on obtient la capacité calorifique de l'atome $s = 2 \times 10^{16}$: c'est l'unité élémentaire ou quantum d'entropie thermique.

La formule (2) montre qu'à la température de la glace fondante ($T = 273°$), la vitesse des molécules d'hydrogène ($m = 2$) est de 1850^m par seconde; celle des molécules d'oxygène ($m = 32$), 460^m par seconde; celle des molécules de mercure ($m = 200$), 185^m par seconde.

Passons au cas de l'énergie électrique. Si la surface d'un métal est portée au potentiel V par irradiation au moyen de rayons de courte longueur d'onde (le plus souvent on mesure V par le potentiel antagoniste qui arrête

([1]) D. Berthelot, *Les effets chimiques des rayons ultraviolets* (*Revue générale des Sciences*, 30 avril 1911); *Les rayons ultraviolets* (*Mémoires de la Société des Ingénieurs civils*, décembre 1911).

l'émission), les électrons de masse m et de charge électrique e sont projetés avec la vitesse v :

$$(3)\qquad \frac{1}{2}mv^2 = eV, \qquad v = \sqrt{2\frac{e}{m}V}.$$

Comme $\frac{e}{m} = 1,77 \times 10^7$, on voit que pour $V = 1$ volt (10^8 unités C. G. S.) la vitesse d'émission des électrons est 595^{km} par seconde.

La comparaison des expressions (1), (2) et (3) montre que, quel que soit le mode d'énergie envisagé, la vitesse des particules est égale à la racine carrée du double produit du facteur d'intensité ($\mathcal{H}$, T, V) par le facteur de capacité rapporté à l'unité de masse $\left(\frac{p}{m}, \frac{s}{m}, \frac{e}{m}\right)$.

Si donc la théorie que j'ai proposée sur la décomposition de l'énergie rayonnante en un produit de deux facteurs est exacte, on doit avoir pour la vitesse v des électrons que projette une surface irradiée par une lumière de fréquence N

$$(4)\qquad \frac{1}{2}mv^2 = hN, \qquad v = \sqrt{2\frac{h}{m}N}.$$

C'est en effet ce que vérifie l'expérience. Cette relation (4) montre par de simples considérations énergétiques, indépendantes d'hypothèses atomistiques telles que celles de la théorie des quanta, que la vitesse des électrons est indépendante de l'intensité de la lumière incidente et dépend de la fréquence : double résultat qui a paru inexplicable avec les anciennes théories qui se bornaient à envisager l'énergie rayonnante en bloc. « Dans les conceptions théoriques ordinaires, dit M. Einstein (¹), on ne comprend pas plus l'action spécifique de la fréquence que l'absence d'action de l'intensité. » La formule (4) indique aussi que la vitesse v n'est pas proportionnelle à la fréquence N comme on l'avait cru à tort à la suite des premières expériences sur l'effet photo-électrique, mais à la racine carrée de N.

Appliquons la relation (4) à un électron ; h représente l'unité élémentaire ou quantum d'entropie rayonnante :

$$h = 6,5 \times 10^{-27}, \qquad m = 0,875 \times 10^{-27}, \qquad v = 3,9\sqrt{N}.$$

Sous l'influence de la lumière violette ($\lambda = 0^{\mu},4$, $N = 7,5 \times 10^{14}$), les électrons sont projetés avec une vitesse de 1070^{km} par seconde ; sous celle de la lumière ultraviolette de longueur d'onde $0^{\mu},2$, avec une vitesse de 1510^{km} par seconde.

La comparaison des équations (2) et (4) éclaircit le mécanisme cinétique

(¹) *Rapports de la Réunion de Bruxelles*, 1912, p. 430.

en vertu duquel la fréquence joue dans les réactions photochimiques le même rôle que la température dans les réactions chimiques ordinaires.

On explique la loi d'action de masse en admettant que le nombre de molécules qui se combinent pendant l'unité de temps est proportionnel au nombre de collisions; on conçoit ainsi que la vitesse d'une réaction de premier ordre (unimoléculaire) soit proportionnelle à la concentration, celle d'une réaction de second ordre (bimoléculaire) au carré de la concentration, etc.

Ces considérations cinétiques s'appliquent également aux réactions photochimiques, à condition d'envisager les électrons au lieu des molécules. Ces réactions sont presque toujours de premier ordre, c'est-à-dire que le phénomène élémentaire correspond à l'émission d'un seul électron.

Toutefois, elles présentent deux différences notables avec les réactions thermiques. En premier lieu, elles ne sont de premier ordre que si l'on opère sur des solutions diluées et des couches minces; sinon, les radiations actives étant absorbées par les premières couches liquides, les suivantes sont soustraites à leur action, les électrons n'y sont plus mis en mouvement, les hypothèses cinétiques précédentes sont en défaut, et l'ordre de la réaction baisse progressivement de un à zéro comme nous l'avons constaté sur le lévulose [1]. Ces complications sont spéciales à l'énergie lumineuse qui vient du dehors, et ne se présentent pas avec l'énergie thermique qui agit uniformément dans la masse.

Un second point à noter est que, sous l'influence de la lumière, les particules prennent des vitesses beaucoup plus grandes que sous l'influence de la chaleur, ainsi qu'il résulte des chiffres donnés plus haut. On s'explique par là que l'élévation de température, qui influence si fortement la vitesse des réactions chimiques ordinaires, n'ait que peu d'effet sur les réactions photochimiques. On doit admettre que les réactions photochimiques pures sont caractérisées par un coefficient de température très voisin de l'unité, comme le nombre 1,02 trouvé par M. Lemoine dans la réduction du perchlorure de fer par l'acide oxalique, ou le nombre 1,03 trouvé par moi-même avec le lévulose [2]. Quand ce coefficient prend des valeurs élevées telles que 1,40, c'est que la réaction primaire photochimique se complique de réactions secondaires de nature proprement chimique et par suite plus sensibles à l'influence de la température.

---

(1) D. Berthelot et H. Gaudechon, *Sur un actinomètre à lévulose* (*Comptes rendus*, t. 156, 1913, p. 707).

(2) D. Berthelot, *Coefficient de température des réactions photochimiques* (*Comptes rendus*, t. 160, 1915, p. 440).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la théorie de l'oscillation de la double liaison indénique.* Note de M. **Ch. Courtot**, présentée par M. Haller.

Au cours de ses travaux dans la série de l'indène, Thiele [1] fit l'observation suivante :

En condensant, par exemple, le chlorure de benzyle avec l'indène, sous l'influence d'un alcali, il obtint un benzylindène qu'il considéra comme l'α-benzylindène. D'autre part, en hydrogénant le benzylidène-indène par l'amalgame d'aluminium, on doit obtenir, par fixation de H^2 en 1-4, le γ-benzylindène. Or les deux hydrocarbures préparés par ces deux voies sont identiques.

Pour expliquer cette identité, Thiele fut conduit à émettre l'hypothèse de l'oscillation permanente de la double liaison indénique, comme l'exprime le schéma suivant :

CHNa $\xrightarrow{+ C^6H^5CH^2Cl}$ CH, CH, CH—CH²—C⁶H⁵ $\rightleftarrows$ CH², CH, C—CH²—C⁶H⁵ $\xleftarrow{+ H^2}$ C=CH—C⁶H⁵

En poursuivant des recherches commencées il y a 5 ans déjà [2], j'ai, au contraire, observé un certain nombre de faits qui établissent, d'une manière générale, l'existence individuelle des isomères α et γ [3].

La première observation a été faite sur un alcool indénique. Quand on condense l'acétone avec le magnésien de l'indène, on obtient un diméthylbenzofulvanol liquide [4], bouillant à 125° sous 8^{mm}. Or si l'on traite ce carbinol par la potasse alcoolique, il se transforme rapidement en un isomère cristallisé, fusible à 82°.

---

(1) Thiele et Bühner, *Lieb. Ann.*, t. 347, 1906, p. 249.

(2) V. Grignard et Ch. Courtot, *A. F. A. S.*, Dijon 1911, p. 191 et 193; *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 364.

(3) Mlle Rebecca Grinberg a fait connaître récemment (Thèse de l'Université de Grenoble, 1914) un cas semblable d'isomérie indénique. C'est cette circonstance qui m'oblige à publier, sans plus attendre, les résultats plus généraux que je possède depuis longtemps déjà.

(4) V. Grignard et Ch. Courtot, *Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 272; t. 154, 1912, p. 361.

Il y avait lieu de penser que le corps liquide, d'après son mode de préparation, devait être l'α-diméthylbenzofulvanol (I), tandis que le solide était vraisemblablement le dérivé γ (II) résultant du déplacement de la double liaison avec migration de 1[at] d'hydrogène. Nous avons pu, en effet, différencier nettement les deux formes par l'oxydation permanganique.

En oxydant à 0°, avec du permanganate de potasse à 5-6 pour 100, le diméthylbenzofulvanol liquide donne un acide-lactone fusible vers 225° et qui, sous l'action de la baryte, se scinde en acide homophtalique et acétone; au contraire, le diméthylbenzofulvanol solide donne directement, dans les mêmes conditions, de l'acide homophtalique :

(I) CH=CH, CH—$(CH^3)^2$COH → CO—, CO^2H, CH—$(CH^3)^2$C—O $\xrightarrow{Ba(OH)^2}$ CO^2H, CO^2H, CH^2 $\xleftarrow{O}$ (II) C—C$(CH^3)^2$OH, CH^2

Ces résultats sont tout à fait conformes aux formules admises.

L'existence des deux isomères précédents, dont l'un facilement transformable dans l'autre par la potasse, m'a conduit à reprendre les expériences de Thiele sur le benzylindène. Il y avait lieu de se demander si l'α-benzylindène était capable d'exister dans les conditions où Thiele a essayé de le préparer; on pouvait, en effet, supposer bien plutôt que, sous l'influence de l'alcali, il s'isomérisait et que, par suite, l'auteur n'avait jamais isolé que le dérivé γ. C'est ce que j'ai vérifié.

Par action du chlorure de benzyle sur le magnésien de l'indène, j'ai obtenu un benzylindène liquide, bouillant à 175°-177° sous 14[mm], tandis que celui de Thiele bout à 185°-187° sous 14[mm] et fond à 34° (1). De plus, le dérivé liquide, traité par la potasse alcoolique, se transforme en isomère cristallisé, fusible à 34°.

En raison de son mode de préparation, le nouveau benzylindène liquide doit évidemment être considéré comme l'α-benzylindène, tandis que celui de Thiele est le γ-benzylindène.

Ces deux formes se différencient très nettement par l'action du brome. Le γ-benzylindène fixe d'abord 2[at] de brome, mais il les élimine

(1) En fait, Thiele l'a décrit liquide, mais en le préparant avec de l'indène pur; Weissgerber (*Ber.*, 1911) l'a obtenu cristallisé.

presque immédiatement et en totalité, sous forme d'acide bromhydrique, en donnant un hydrocarbure jaune, le phénylbenzofulvène, identique à celui obtenu par Thiele en condensant l'indène avec le benzaldéhyde (benzylidène-indène) :

CH² → CH² → CH
CH CHBr CH
C CBr C
$C^6H^5 — CH^2$ $C^6H^5 — CH^2$ $C^3H^5 — CH$

L'α-benzylindène, au contraire, donne un dibromure liquide, qui ne perd spontanément qu'un peu d'acide bromhydrique. Si l'on essaie de le débromhydrater par la pyridine, on n'obtient que des résines, résultat facilement explicable par la constitution.

L'individualité des deux isomères α et γ indéniques est encore plus nettement mise en évidence, si possible, avec les deux benzhydrylindènes, parce qu'ils sont tous deux cristallisés.

La condensation de l'éther bromhydrique du diphénylcarbinol avec le magnésien de l'indène donne un hydrocarbure incolore, fusible à 161°, qui doit être l'α-benzhydrylindène. D'autre part, l'hydrogénation du diphénylbenzofulvène doit conduire normalement au γ-benzhydrylindène; on obtient, en effet, un hydrocarbure isomère du précédent et fusible à 115°-116°. Ici encore, l'action de la potasse alcoolique permet de transformer le dérivé α en dérivé γ :

CH → (KOH) CH² ← (+ H²)
CH CH
CH (α) C (γ) C
$C^6H^5 — CH — C^6H^5$ $C^6H^5 — CH — C^6H^5$ $C^6H^5 — C — C^6H^5$

Les recherches précédentes (auxquelles vient s'ajouter l'observation de Mlle R. Grinberg, de deux diphénylindènes isomères) permettent de conclure que, d'une façon générale, les dérivés monosubstitués indéniques sont capables d'exister, à l'état libre, sous les deux formes α et γ (¹), la première se transformant aisément en la seconde sous l'influence des alcalis. Ce phénomène d'isomérisation avait empêché, jusqu'à présent,

(¹) Ceci n'exclut en rien la possibilité d'un isomère β.

d'isoler les dérivés α. Thiele, contrairement à ce qu'il pensait, n'a donc jamais eu entre les mains que les dérivés γ et, par suite, tombe d'elle-même la théorie de l'oscillation qu'il avait imaginée pour expliquer ses résultats.

CYTOLOGIE. — *L'évolution nucléaire et les phénomènes de la sexualité chez les Lichens du genre* Peltigera. Note de M. et Mme **Fernand Moreau**, présentée par M. Guignard.

Les controverses qui se livrent au sujet de la sexualité des Champignons sont relatives à deux points principaux :

1° Les uns soutiennent, avec Dangeard, qu'au cours du cycle évolutif des Ascomycètes une seule karyogamie a lieu, qui prend place dans les jeunes asques; les autres, avec Harper, prétendent que la fusion dangeardienne est précédée d'une autre fusion nucléaire qui a lieu dans l'ascogone et prélude au développement du périthèce.

2° Certains auteurs reconnaissent à la réduction chromatique chez les Ascomycètes les caractères qu'elle revêt généralement chez les autres êtres vivants; d'autres croient que l'asque est le siège de deux réductions chromatiques successives, phénomène de double réduction qui ne se trouve réalisé nulle part ailleurs chez les êtres vivants.

Ces deux questions, en apparence différentes, n'en font en réalité qu'une seule, car la double réduction qui aurait lieu dans l'asque est, aux yeux de ceux qui en soutiennent l'existence, la conséquence de deux fusions nucléaires successives, l'une dans l'ascogone, l'autre dans l'asque. Sous l'une et l'autre forme, c'est la question de la sexualité des Ascomycètes qui est en cause; elle peut se résoudre de deux façons : 1° par la recherche d'une karyogamie dans l'ascogone; 2° par la recherche dans l'asque de deux réductions chromatiques successives. Nous sommes donc amenés à étudier, d'une part le développement de l'ascogone, d'autre part les divisions du noyau de fusion qui préparent la formation des ascospores. C'est par l'une et l'autre de ces deux voies que nous avons abordé le problème de la sexualité chez diverses espèces du genre *Peltigera* (*P. canina*, *P. rufescens*, *P. polydactyla*, *P. horizontalis*).

I. *Développement de l'ascogone*. — L'ascogone prend naissance aux dépens des hyphes de la médulle du bord des lobes fertiles du thalle. Il est formé d'abord de cellules généralement uninucléées qui se distinguent des

cellules banales de la médulle par leur taille plus grande et leur forme plus renflée. A la suite de divisions répétées de leur noyau primitif, ces cellules deviennent multinucléées; en même temps leur protoplasme s'enrichit, devient de plus en plus dense et de plus en plus chromatique. Bientôt les cellules de l'ascogone émettent des hyphes ascogènes plurinucléés; ceux-ci se ramifient et séparent à leur extrémité des files de cellules binucléées. Les cellules terminales de ces chaînes de dikaryocytes s'allongent et se transforment en asques. Dans chaque asque les deux noyaux s'unissent en un noyau de fusion dont nous étudierons ultérieurement la destinée.

Au cours de ce développement, nous n'avons observé, malgré de minutieuses recherches, aucune autre fusion de noyaux que celle de l'asque; la densité et la chromaticité de plus en plus grandes du protoplasme nous indiquant l'âge des cellules de l'ascogone, nous avons toujours trouvé des noyaux peu nombreux dans les cellules jeunes, des noyaux nombreux dans les cellules âgées; nous n'avons jamais constaté dans ces dernières la diminution du nombre des noyaux qu'eût entraîné un phénomène de karyogamie. Nous affirmons donc qu'aucune fusion nucléaire n'a lieu dans l'ascogone et que la seule karyogamie qu'on observe dans le cycle du développement des *Peltigera* est la karyogamie dangeardienne entre les noyaux du jeune asque. Ajoutons que les phénomènes d'appariement des noyaux, signalés par certains auteurs (Claussen, Bessonoff) chez d'autres Ascomycètes, n'ont pas été rencontrés par nous chez les *Peltigera*.

2. *Réduction chromatique*. — L'étude des divisions nucléaires dans l'asque nous a conduits à des résultats concordant avec les conclusions du paragraphe précédent.

La première mitose du noyau de fusion est une mitose hétérotypique, la deuxième est une mitose homéotypique et la troisième est une mitose typique. La réduction chromatique s'effectue suivant le schéma hétéro homéotypique. C'est une réduction chromatique ordinaire; le phénomène n'intéresse que les deux premières mitoses du noyau de fusion; la troisième est une mitose végétative banale.

Toutes les mitoses, réductrices et végétatives, possèdent chez les *Peltigera* un caractère particulier qui fait de la division du noyau dans ce genre un type spécial de mitose parmi celles des Ascomycètes : il y a disparition précoce du nucléole et de la membrane nucléaire. D'autre part, alors que, chez les autres Ascomycètes, le nombre haploïde des chromosomes est généralement de quatre ou de huit, ici il est réduit à deux; aussi voyons-nous apparaître

deux chromosomes à deux branches à la prophase de la première mitose de l'asque; la deuxième montre deux chromosomes déjà divisés longitudinalement à la fin de la mitose précédente; à la troisième mitose les deux chromosomes sont simples et ils se montrent tels dans toutes les mitoses successives des organes végétatifs ainsi que de l'ascogone et des hyphes ascogènes.

Le nombre restreint des chromosomes facilite l'étude des divisions nucléaires chez les *Peltigera ;* il nous permet d'assurer qu'*une seule réduction chromatique a lieu au cours du développement des* Peltigera ; *c'est une réduction chromatique ordinaire et seules les deux premières mitoses de l'asque y prennent part.*

De l'ensemble de nos observations sur le développement de l'ascogone et sur l'évolution nucléaire des *Peltigera* nous concluons que, chez ces Lichens, *il n'y a pas de fusion de noyaux dans l'ascogone, la seule karyogamie qui existe a lieu dans l'asque; elle est immédiatement suivie d'une réduction chromatique qui présente les mêmes caractères que chez les autres êtres vivants.*

CHIMIE AGRICOLE. — *Sur les bouillies cupriques.* Note [1] de M. **Fonzes-Diacon**, présentée par M. Ch. Moureu.

Il résulte des travaux de Pickering, de Borlèse et Sostegni, de Sicard, etc., sur les bouillies bordelaises, que la majeure partie du cuivre s'y trouve insolubilisée sous forme de sulfates d'autant plus fortement basiques que les quantités de chaux mises en œuvre pour la précipitation d'un même poids de sulfate de cuivre sont plus élevées; c'est ainsi que le précipité bleu-vert des bouillies acides sera principalement constitué par du sulfate tétracuivrique, alors que, dans les bouillies à commencement de neutralité (4^{mol} de chaux pour 5^{mol} de sulfate de cuivre), ce sulfate basique se trouvera en plus forte proportion que dans les bouillies à fin de neutralité (9^{mol} de chaux pour 10^{mol} de sulfate de cuivre), lesquelles renfermeront surtout du sulfate décacuivrique.

Enfin, dans les bouillies alcalines, le précipité est formé de composés encore plus fortement basiques unis à de la chaux.

Or, la valeur anticryptogamique d'une bouillie paraît liée à la proportion de sulfate tétracuivrique qu'elle renferme, car, de tous les sulfates

(1) Séance du 12 avril 1915.

basiques, c'est celui qui, sous l'influence de l'acide carbonique de l'air, donnera progressivement naissance à la plus forte proportion de sulfate de cuivre libre, sel dont l'action sur les spores du mildiou est des plus énergiques.

Dans les bouillies bourguignonnes, il paraît se former, d'après mes recherches, des sulfates moins fortement basiques, ce qui est dû à l'action de l'acide carbonique mis en liberté par la décomposition du carbonate de soude; j'ai pu constater que les bouillies acides renferment également, en majeure partie, du sulfate tétracuivrique bleu-vert; un excès de carbonate de soude transforme ce composé en sulfate pentacuivrique bleu, mais il ne se forme pas de sulfate plus fortement basique, car l'acide carbonique, mis en liberté dans cette réaction, donne alors de l'hydrocarbonate de cuivre bleu $CO^3Cu, CuO, 2H^2O$ dont la proportion va en augmentant avec l'excès de carbonate de soude.

Dans les bouillies bourguignonnes nettement alcalines, le précipité est principalement constitué par de l'hydrocarbonate bleu, qui se transforme rapidement en le monohydrate vert malachite, composé fort peu soluble en milieu carbonique et, par suite, ayant un faible pouvoir anticryptogamique.

Les liqueurs qui tiennent en suspension ces divers composés cupriques insolubles renferment encore une certaine proportion de cuivre soluble.

Dans les bouillies bourguignonnes acides, le cuivre soluble s'y trouve en partie à l'état de bicarbonate de cuivre; mais celui-ci se décompose très rapidement à l'air par départ d'acide carbonique, et l'hydrocarbonate de cuivre naissant, mis en liberté, se combine au sulfate de cuivre en excès en donnant du sulfate tétracuivrique insoluble; celui-ci se dépose à l'état de pentahydrate bleu ou de tétrahydrate vert, suivant la lenteur avec laquelle il prend naissance.

Le sel basique ainsi formé, dont la proportion peut dépasser 100^g en $SO^4Cu, 5H^2O$ par hectolitre de bouillie à 2^{kg}, augmente donc la valeur anticryptogamique des bouillies acides; les bouillies neutres donnent naissance à des proportions moins grandes de ce composé; enfin, le liquide surnageant les bouillies basiques renferme encore une certaine proportion de bicarbonate de cuivre, mais pas de sulfate de cuivre, de sorte que ce bicarbonate se décomposant à l'air donne, non plus du sulfate tétracuivrique, mais bien de l'hydrocarbonate de cuivre, dont la valeur anticryptogamique est bien moindre.

Dans les bouillies bordelaises, quelle que soit leur réaction, l'alcali étant de l'hydrate de calcium, le cuivre soluble ne devrait pas exister à l'état de bicarbonate; mais il ne faut pas oublier que les chaux du commerce sont toujours plus ou moins carbonatées; or, le carbonate de chaux réagit sur le sulfate de cuivre, surtout quand le lait de chaux est versé très lentement dans un grand excès de ce sel; il en résulte un dégagement d'acide carbonique qui donne naissance à une certaine proportion de bicarbonate de cuivre.

Celui-ci, en se décomposant, donnera du sulfate tétracuivrique dans les bouillies acides; la proportion de ce composé sera moins grande dans les bouillies neutres; enfin, les bouillies alcalines ne renfermeront, en solution, qu'une faible proportion de bicarbonate de cuivre (d'autant plus faible que la préparation de la bouillie aura été plus rapide), et celui-ci, par sa décomposition à l'air, donnera naissance à de l'hydrocarbonate de cuivre bleu peu actif et dont l'activité ira en diminuant encore avec sa transformation en hydrocarbonate vert.

En résumé, les bouillies acides sont les plus riches en sulfate tétracuivrique; elles renferment en outre, en solution, du sulfate de cuivre libre ainsi que les éléments du sulfate tétracuivrique; leur action anticryptogamique est très élevée.

Les bouillies neutres renferment d'autant moins de ce sel basique qu'elles sont plus fortement neutres.

Les bouillies alcalines en renferment peu; la liqueur qui les surnage tient en dissolution du bicarbonate de cuivre qui, par sa décomposition très rapide à l'air, ne donnera que de l'hydrocarbonate de cuivre, forme sous laquelle le cuivre est moins actif.

A 15 heures trois quarts l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16 heures un quart.

G. D.